数理解析研究所講究録
975 巻 1996 年 43-50

グラフのエントロピーと符号

大阪教育大学　藤井　淳一　(Jun Ichi Fujii)

1．無限有向グラフと隣接作用素

(無限) 有向グラフ G とは、頂点の集合 $V(G)$ と矢の集合 $E(G)=\{(u,v)\mid u,v\in V(G)\}$ のペアとする。u から v への矢 (u,v) は、$u\to v$ とも表す。頂点 v に正規直交基底 e_v を対応させ、Hilbert space $H=\ell^2(G)$ を考える。藤井 (正)・笹岡・綿谷 [4] は、Mohar [8] の無向グラフの場合にならって、有向グラフの隣接行列 $A=A(G)$ を次の可閉作用素で定義した：

$$\text{定義域}\quad \mathrm{Dom}\ A=\left\{x=\sum_{v\in V}x_ve_v\in H\ \middle|\ \sum_{u\in V}\left|\sum_{v\to u}x_v\right|^2\leq\infty\right\}$$

$$Ax=\sum_{u\in V}\left(\sum_{v\to u}x_v\right)e_u.$$

G が、bounded valency k をもつ (各頂点の出入りの矢が、それぞれ k 以下の) 場合、$A(G)$ は有界作用素となり、以下この場合のみを扱う。これで作用素上の様々な概念 (ノルム・数域 (半径)・スペクトル (半径) や作用素の分類など) がグラフ上で扱えることになる。特に、無向グラフは自己共役作用素に対応するグラフとして位置付けられる。

2．グラフの２つのエントロピー

まず、ベキ零グラフのスペクトル半径を求めると [2]:

補題１． グラフ G : ベキ零 $\iff r(G)<1.$

以後ベキ零グラフは除くことにして、グラフの１つのエントロピーを決めよう [2]:

定義１． **spectral entropy** $\quad h(G)=\log r(G)\geq 0.$

有限グラフの場合、藤井（正）・中村・瀬尾・綿谷 [5] が指摘したように、Kolmogorov の complexity になる：

$$h(G) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\langle A(G)^n u, u\rangle}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log a_n}{n}.$$

ここで $u = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. **Schwarz constant** $a_n(G) = \langle A(G)^n u, u\rangle$ は、G の n-path の個数.

spectral entropy の分布を考えるのに、次の例を見てみよう：

例１．$k \geq 2, n \geq 1$ に対して、有限グラフ $G_n(k)$ で $r(G_n(k)) = k^{1/n}$ となるものがある。例えば、k個の巡回 n 置換 $U(n)$ を１つの頂点で結合したグラフは、中心から出る nm-path が $(k^m)^{1/(nm-n+1)}$ であるので、極限を取れば $r(G_n(k)) = k^{1/n}$ がわかる：

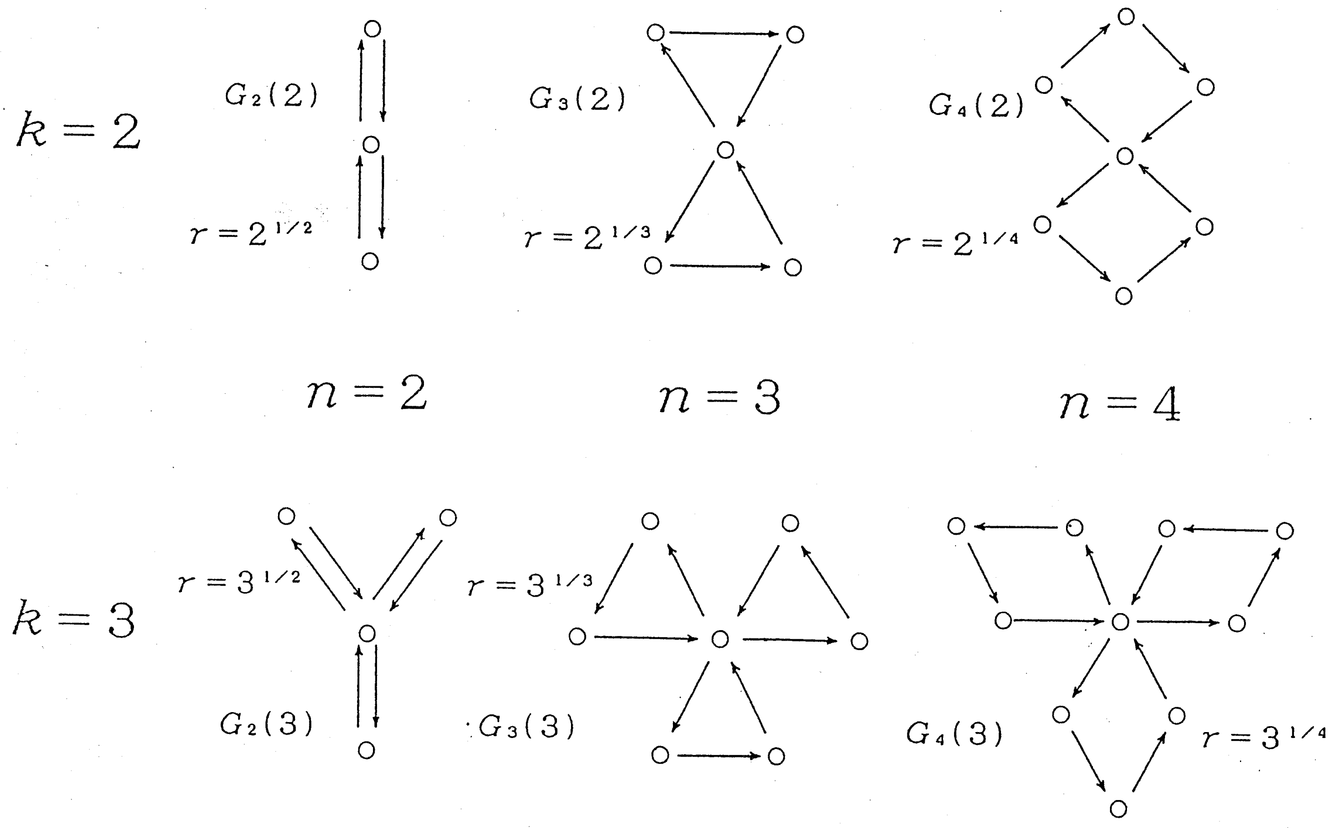

Fig. 1 $G_n(k)$

この例のテンソル積をとっていけば、spectral entropy の分布がわかる：

定理 2. $h(G)$ は、区間 $[0,\infty)$ 上に稠密に分布している。

$$a_n(v) = \sum_{u\in V(G)} \langle A(G)^n e_v, e_u\rangle$$

は、v から出る n-path の数であるが、これから別のエントロピーにいたる [2]：

定義 2. **位相的（組み合わせ論的）エントロピー**

$$H(G) = \sup_{v\in V(G)} \lim_{n\to\infty} \frac{\log a_n(v)}{n} \geq 0].$$

2つのエントロピーの間に、次の関係がある：

定理 3. $h(G) \leq H(G) \leq 2h(G)$ で、有限グラフでは一致する。

定理 2 とあわせて、分布はほぼ同じになる：

系. $H(G)$ も区間 $[0,\infty)$ 上に稠密に分布する。

上の定理の評価式は、次の例から best possible であることがわかる：

例 2. 1頂点（根）から始め、k本ずつの矢が出て、内 m 本の行き先は行き止まりの頂点という有向木 $T_{k,m}$を考えると、根からの n-path の数は $w_n = k(k-m)^{n-1}$ なので

$$H(T_{k,m}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log k(k-m)^{n-1}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log k + (n-1)\log(k-m)}{n} = \log(k-m)$$

となる。更に、$T_{k,m}$ は $A(T_{k,m})^n$ もまたグラフの隣接作用素になり得るという意味でべき乗可能であり、そのグラフを $T^n_{k,m}$と書けば、$T^n_{k,m} = T_{k(k-m)^{n-1},m(k-m)^{n-1}}$ である。一方、ある射影 Pによって、$A(T_{k,m})^*A(T_{k,m}) = kP$ と表されることから、$\|T_{k,m}\| = \sqrt{k}$ となるので、spectral entropy は

$$h(T_{k,m}) = \log r(T_{k,m}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log \|T^{n+1}_{k,m}\|}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log \sqrt{(k-m)^n}}{n+1} = \frac{\log(k-m)}{2}.$$

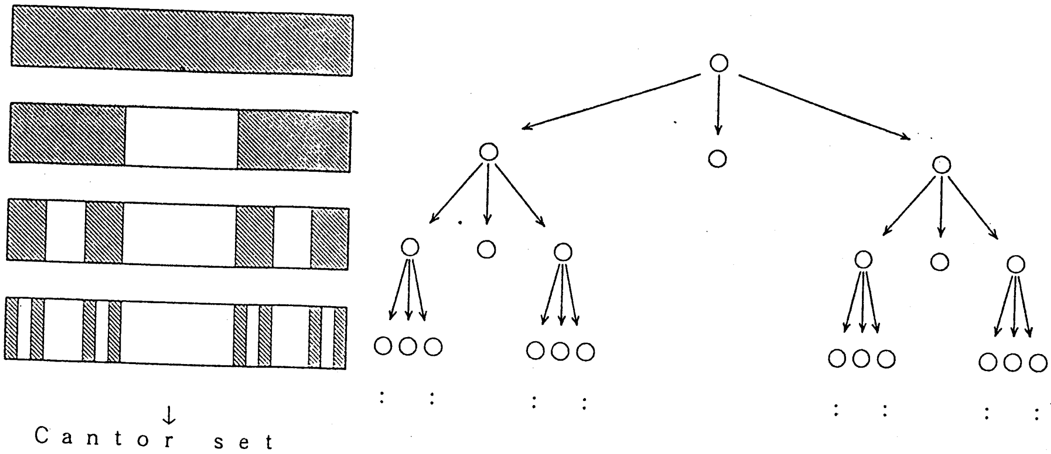

Fig. 2 $T_{3,1}$

また $T_{k,m}$ は、自己相似集合とよばれるフラクタルの生成原理を示していると考えられる。例えば、$T_{3,1}$ は直線上では Cantor set を表現している。元の図形を J次元空間上のものとして、他にも次のような例がある：

自己相似集合	k	m	J	縮小率	相似次元
Cantor dust	3	1	1	1/3	$\log 2/\log 3$
Sierpiński gasket	4	1	2	1/2	$\log 3/\log 2$
Menger sponge	27	7	3	1/3	$\log 20/\log 3$

エントロピーとの関連は、次のように表現できる：

$$d = \frac{J\log(k-m)}{\log k} = \frac{Jh(T_{k,m})}{\log \|T_{k,m}\|} = \frac{JH(T_{k,m})}{2\log \|T_{k,m}\|}.$$

3. Ziv のエントロピー

グラフ G の各矢の上にアルファベットを対応させると、G 上の無限 path は、G 上の**メッセージ** と考えられる。以後、G は、有限グラフとするので、エントロピーは、一致する： $h(G) = H(G)$.

メッセージ $x = (v_0, v_1, v_2, \cdots)$ について、$x[n]$ を x の最初の n 文字 $(v_0, v_1, \cdots, v_n)$ とする。メッセージ上のシフト $S : (\cdots, v_i, \cdots) \mapsto (\cdots, v_{i+1}, \cdots)$ によって x の中の n 単語の数を

$$X_n = \sharp \left\{ S^j(x)[n] \,\middle|\, j = 1, 2, \cdots \right\}$$

とするとき、Ziv [9] はある種の complexity を定めた：

定義 3. Ziv's entropy $\quad h(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\log X_n}{n}.$

グラフ上のメッセージにもこれと同じ定義を適用すると：

定理 4. 一般に $h(x) \leq h(G)$ で、G が既約のとき等号が成立つ x がある。

証明. $X_n \leq a_n(G)$ より $h(x) \leq h(G)$ はすぐわかる。さらに G を既約とする。$M = a_m(G)$ として、$m \geq 1$ について、G 上のすべての異なった m-word を、$x_1^m, x_2^m, \cdots, x_M^m$ としておく。G の既約性は相互推移可能性と同等なので、$x_i^m = v_1 v_2 \cdots v_m$ と $x_{i+1}^n = u_1 u_2 \cdots u_n$ について v_mから u_1への path $(v_m, w_1, \cdots, w_k, u_1)$ が G にある。そこで $w_{i,j}^{m,n}$ として、もし $x_i^m x_{i+1}^n$が G 上の単語でないなら $w_1 w_2 \cdots w_k$をとり、単語なら空の文字列とする。すると、$x_i^m w_{i,j}^{m,n} x_{i+1}^m$ は、常に G 上の単語に変換できる。メッセージ x を

$$x = x_1^1 w_{1,2}^{1,1} x_2^1 \cdots x_{a_1}^1 w_{a_1,1}^{1,2} x_1^2 w_{1,2}^{2,2} x_2^2 \cdots,$$

とおけば、$X_m = a_m(G)$ となって、$h(x) = h(G)$ を得る。

注. 上記の entropy や complexity は、非確率的な枠組みで述べられているので、確率的な設定との関連をみておこう。隣接行列が確率行列になるように確率分布 $\mathcal{P}$ を G の矢に設定すると、$G(\mathcal{P})$ は Markov 連鎖と考えられる。例えば、[7] にあるように、つぎのことが知られている：

$$h(G)(= H(G)) = \max_{\mathcal{P}} H(G(\mathcal{P})).$$

ここで $H(G(\mathcal{P}))$ は Markov 情報源としてのエントロピーである。実際には、$A(G) = (a_{ij})$ の Frobenius vector $f = (r_i)$ 　について、上記の最大値は、次の行列で与えられる：

$$B = (b_{ij}), \qquad b_{ij} = \frac{r_i a_{ij}}{r_j r(G)}.$$

4．グラフ上のブロック符号化定理

この節は、瀬尾氏との共同研究によるものである。いわゆる情報源符号化におけるブロック符号化において、符号長 N の符号器 (resp. 復号器) を $\varphi : x \mapsto y$ (resp. $\psi : y \mapsto \hat{x}$) としておく。 Ziv は次の補題を示した [9]:

Data Processing Lemma. 　$h(\widehat{x}) \leq h(y) \leq h(x)$.

ここで、メッセージ $x, \hat{x}$ は M 個の文字を持つアルファベットで書かれ、y の方は、$M'(\leq M)$ 個とする。グラフ上のメッセージは、いわば禁止語を設けたものとみれるが、この意味で Ziv [9] の結果を一般化していくことができる：

定理 5． 　グラフ F 上のメッセージ x について、$h(x) > h(F)$ ならば $x \neq \widehat{x}$.

証明. もし $x = \widehat{x}$ なら、定理 4 より $h(y) \leq h(F)$. 一方、Data Processing Lemma から $h(\widehat{x}) \leq h(y) \leq h(F)$ がわかるので、$h(x) \leq h(F)$. この対偶を取れば良い。

最後に、Ziv の符号化定理を一般化するが、original は statement 自体も少し曖昧で、証明も少々怪しい。有本がその著書 [1] の中で定式化した、Ziv-有本の符号化定理を一般化する。グラフの非周期性、すなわち隣接行列の安定性は、path の長さが m あれば、どの 2 つの頂点間も結べるという m の存在と同値であることを思い出しておこう。

定理 6 (グラフ符号化定理). 　メッセージ x を非周期的グラフ F 上に符号化するとき、$h(x) < h(F)$ ならば $x = \hat{x} \equiv \psi(\varphi(x))$ となる N 符号器 φ と復号器 ψ が存在する。

証明. まず、N が取れたとして符号語の長さを計算してみよう。ℓ を $\ell^2 M^\ell \leq N$ となる N の最大の約数とする。i 番目のブロック $S^{iN}(x)[N]$ において、すべての異なる ℓ-単語

$x_1^\ell, x_2^\ell, \cdots, x_s^\ell$ について、$s = X_\ell \leq M^\ell$ と置く。上述の path の長さ m を取っておく。b_n を F の Schwarz constant とするとき、$b_{k-m} \geq M^\ell \geq b_{k-m-1}$ となる k を選ぶと、単語 x_i^ℓ は、F の符号語 y_i^{k-m} に変換できる: 定理 4 の証明と同様に、$y_1^{k-m} z_1^m y_2^{k-m} z_2^m \cdots y_M^{k-m} z_s^m$ がまた F 上の単語となるような m-単語 z_i^m が存在する。このようにしてできた文字列を符号語 $S^{iN}(y)[N]$ の最初の部分とする。すると、その長さ L は、

$$
\begin{aligned}
L = (k-m+m)s = kX_\ell &\leq X_\ell \left(m + 1 + \frac{k-m-1}{\log b_{k-m-1}} \log M^\ell \right) \\
&\leq N \left(\frac{m+1}{\ell^2} + \frac{k-m-1}{\log b_{k-m-1}} \frac{\log M}{\ell} \right)
\end{aligned}
$$

となる。i 番目のブロックを

$$
S^{iN}(x)[N] = S^{iN}(x)[\ell] S^{iN+\ell}(x)[\ell] \cdots S^{i(N+1)-\ell}(x)[\ell]
$$

のように高々 $\left(\frac{N}{\ell}\right)$ 種類の ℓ-ベクトルに分解するとき、上記の符号語の $L+1$ 文字目からは、ここに実際にあらわれるベクトルの（最初の L 文字に対応する）アドレスを書き込むことにする。すると、符号化できるための長さ $Q = q - m$ は、

$$
b_{Q-1} < X_\ell \leq b_Q, \quad \text{すなわち、} \quad q < m + 1 + \frac{q-m-1}{\log b_{q-m-1}} \log X_\ell
$$

あれば良い。$S^{iN}(x)[\ell], S^{iN+\ell}(x)[\ell], \cdots, S^{i(N+1)-\ell}(x)[\ell]$ の各々に対応するアドレス $w_1^{q-m}, \cdots, w_P^{q-m}$ について、$w_1^{q-m} z'_1 w_2^{q-m} z'_2 \cdots w_P^{q-m} z'_P$ がまた F 上の符号長 $\left(\frac{N}{\ell}\right)q$ の符号語になるような、m-単語 z'_i がとれる。

あとは、$K = L + \left(\frac{N}{\ell}\right)q$ が N で押さえられるように取れることを示せば良い（もし、$K = L + \left(\frac{N}{\ell}\right)q < N$ なら、例えば 0 でうめると約束して長さを調整する）。

$$
\begin{aligned}
K &= L + \left(\frac{N}{\ell}\right) q \\
&\leq N \left(\frac{m+1}{\ell^2} + \frac{k-m-1}{\log b_{k-m-1}} \frac{\log M}{\ell} + \frac{m+1}{\ell} + \frac{q-m-1}{\log b_{q-m-1}} \frac{\log X_\ell}{\ell} \right)
\end{aligned}
$$

となって、

$$
\lim_{\ell \to \infty} \frac{1}{\ell} \log X_\ell = h(x) < \log r(F) = \lim_{q \to \infty} \frac{1}{q-m-1} \log b_{q-m-1}
$$

であり、しかも $\lim_{\ell \to \infty} \frac{N}{\ell} = 0$ だから、$K \leq N$となる Nをとることができる。.

系. 各頂点から M個以内の矢が出ているグラフ G 上のメッセージを非周期的グラフ F 上に符号化するとき、$h(G) < h(F)$, $M \geq M'$ なら符号長を長くすれば可能である。

謝辞. この内容に関して、いろいろとご教示いただいた日合文雄先生に感謝いたします。

参考文献

[1] 有本　卓: 確率・情報・エントロピー, 1980, 森北出版.

[2] J.I.Fujii: Entropy of graphs, Math. Japon., 38(1993), 39–46.

[3] J.I.Fujii, H.Sasaoka and Y.Watatani: The spectrum of an infinite directed graph, Math. Japon., 36(1991), 607–625.

[4] J.I.Fujii and Y.Seo: Graphs and tensor products of operators, Math. Japon., 41(1995) 245-252.

[5] M.Fujii, M.Nakamura, Y.Seo and Y.Watatani: Graphs and Kolmogorov's complexity, Math. Japon. to appear.

[6] M.Fujii, H.Sasaoka and Y.Watatani: Adjacency operators of infinite directed graphs, Math. Japon., 34(1989) 727–735.

[7] 堀部　安一: 情報エントロピー論, 1989, 森北出版.

[8] B.Mohar: The spectrum of an infinite graph, Linear Algebra Appl., 48(1982) 245–256.

[9] J.Ziv: Coding theorems for indivisual sequences, IEEE Trans. on Information Theory, IT-24, No.4(1978) 405–412